



第02章

平面连杆机构

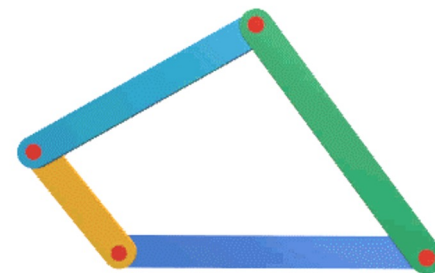
(下)

宋超阳

南方科技大学

本章要点概述

- 平面四杆机构的基本形式、演变及其应用
- 平面四杆机构设计中的共性问题
- 平面四杆机构的设计
- 平面连杆机构的解析综合



转动副的主要结构形式

采用滑动轴承结构时

- 结构简单、体积小，且能起减振作用，但必须加工精确
- 建议采用滑动轴承结构：因轴承间隙对构件间的运动精度影响较大，故对于运动副元素彼此作相对转动的运动副（如连杆机构的主动曲柄）

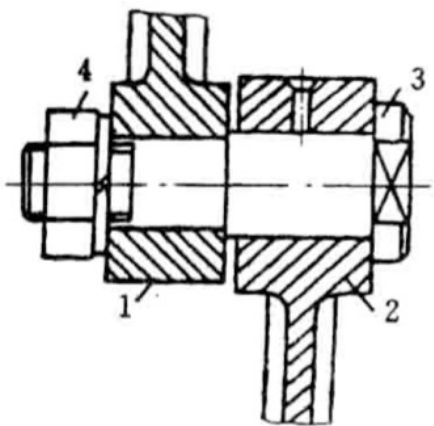
采用滚动轴承结构时

- 摩擦损失小，运动副间隙小，但结构尺寸较大。对于不是作整周转动的运动副元素（如连杆和摇杆的运动副），当运动换向时会出现混合摩擦，这在载荷很大且运动频率很高时会导致磨损加剧
- 采用滚动轴承结构比较合适：为了减少磨损

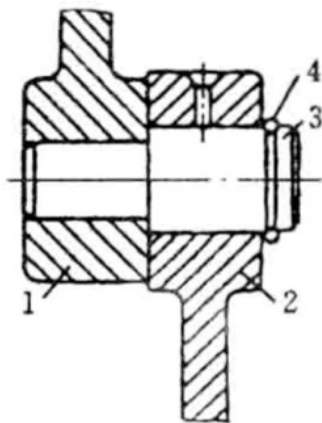
滚针轴承或滚针组

- 对于高速机器，特别是在纺织机械制造业中，经常采用
- 优点是结构尺寸小，能承受侧向力，而不会像滑动轴承那样会发生轴承的咬住现象

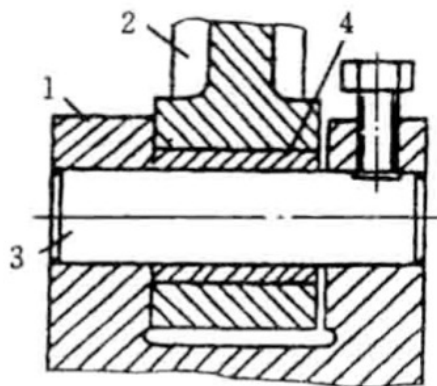
滑动轴承式转动副



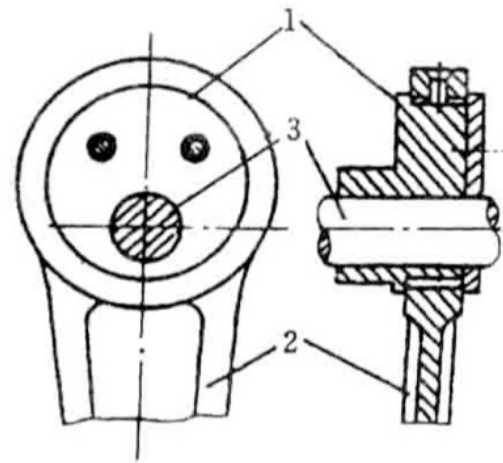
(a)



(b)



(c)



(d)

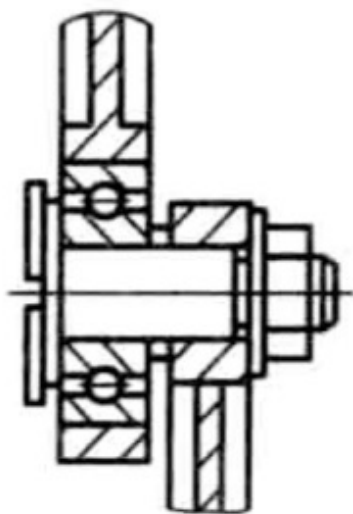
构件1与2用销轴3连接，并用螺母4锁住
构件2与销轴3为间隙配合

构件1与销轴3为压紧配合，构件2与销轴3为间隙配合，4为轴用弹性挡圈

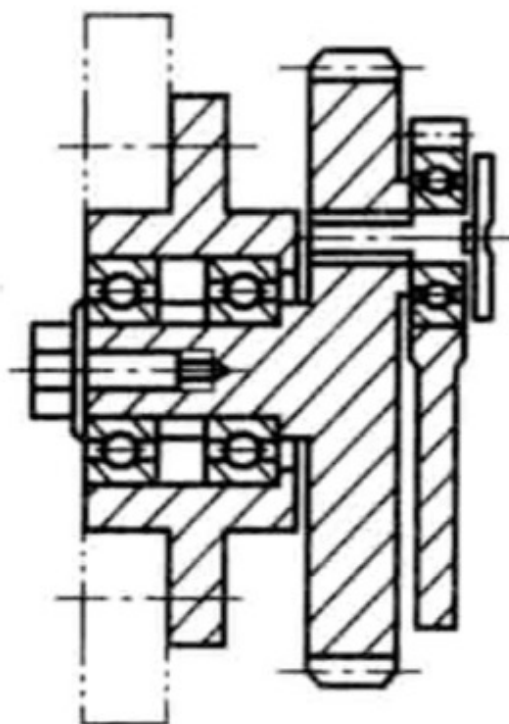
构件2的孔内压紧配合有含油轴套或铜轴套4

偏心盘1紧固在轴3上，与连杆2为间隙配合

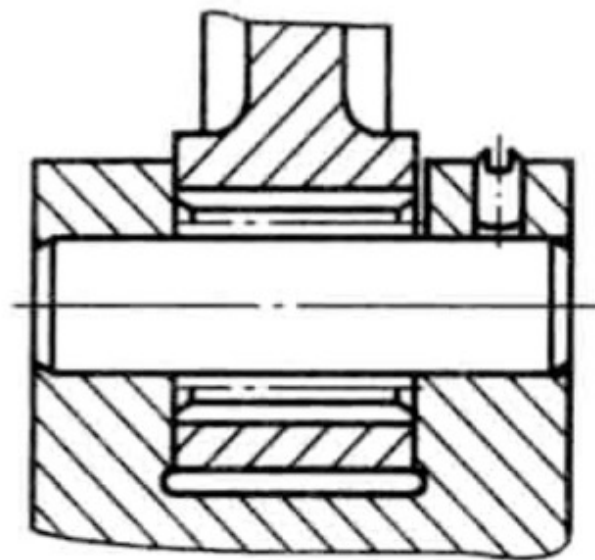
滚动轴承式转动副



(a) 单排球轴承式

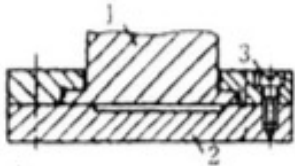
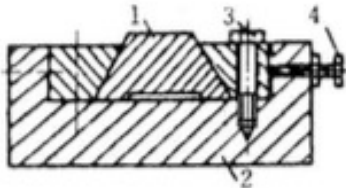
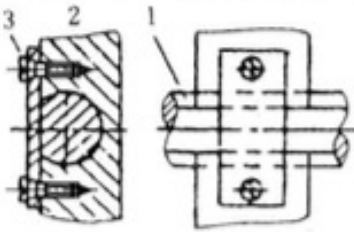
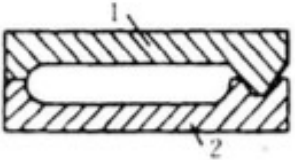


(b) 双排球轴承式

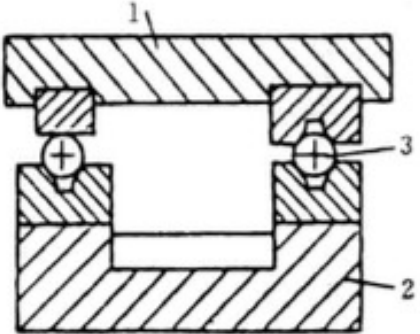
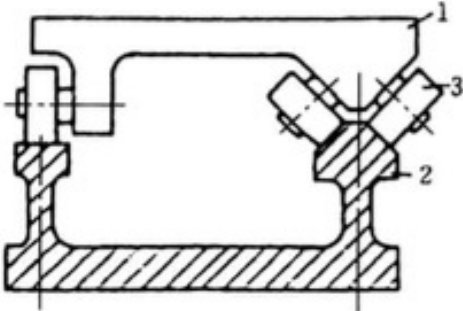


(c) 滚针轴承式

移动副的主要结构形式

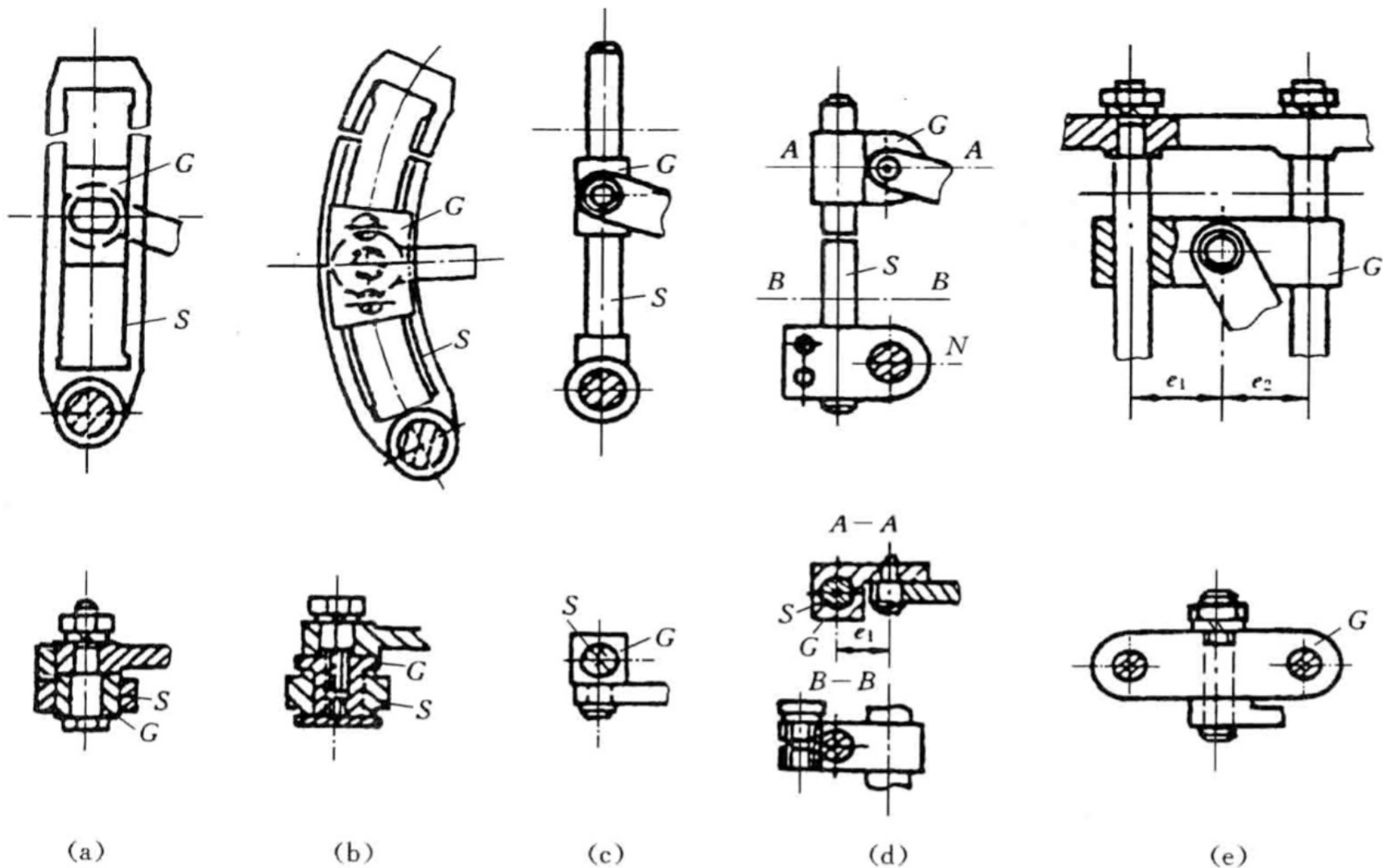
类 型	结构简图
T形槽式	 <p>滑块 1 在导路 2 的 T 形槽中移动, 槽与滑块的间隙由紧定螺钉 3 调节, 这种结构的对中性较差, 容易磨损</p>
燕尾槽式	 <p>滑块 1 在导路 2 的燕尾槽中移动, 松开紧定螺钉 3, 并旋动调节螺钉 4, 可改变滑块 1 与导路 2 的间隙, 这种结构的对中性较好</p>
圆柱槽式	 <p>构件 1 为部分圆弧截成弦平面的细长圆柱体, 并用侧板 3 限制构件 1 和导路 2 间的相对转动, 只允许构件 1 沿轴线方向相对导路 2 移动</p>
组合形导路	 <p>构件 1 与 2 的右端为 V 形导路, 对中性较好; 左端为一平面导路, 以增加承载能力, 提高运动稳定性</p>

移动副的主要结构形式

类 型	结 构 简 图
滚动导路	 <p>滑块 1 与导路 2 之间放置滚珠 3, 可大大减小摩擦, 运动轻便, 导向准确, 但刚度不及滑动导路</p>
滚动组合形导路	 <p>它是在组合形导路的基础上改用滚动导路, 滚柱 3 为专用的滚动轴承</p>

具有转动副和移动副的构件结构形式

- 作为一部机器或仪器基础件的机构构件必须有
 - 尽可能简单且有利于加工装配的形状
 - 符合强度要求的截面尺寸
 - 符合其使用功能要求的合理结构
- 设计具有转动副和移动副构件的结构时，基本上取决于
 - 转动副轴线相对于导路方向的位置
 - 移动副元素接触部位的数目和形状
- 设计移动副时，要预先考虑到运动副接触面的基本长度，以便减小歪斜的危险
 - 而具有两个移动副的机构构件，其结构形式取决于
 - ① 与相邻构件（大多为机架）接触部位的类型和数目
 - ② 移动副中接触部位的形式和导路方向的相对位置
- 设计连杆机构构件的结构时，还须考虑制造工艺性、装配、空间限制及机构调整等因素



在导杆中装滑块

在圆截面摆杆上装套筒
且运动副有一个接触面

在圆截面摆杆上装套筒
且运动副有两个接触面

平面连杆机构的 解析综合

解析法是根据运动学原理建立设计方程，然后进行解析求解。

解析法适合于解决连杆机构尺度综合的更一般性问题、更复杂的机构构型及多方面的运动性能要求下的尺度综合问题

平面连杆机构的解析综合

- 精确点法综合
 - 以精确满足若干机构运动要求为基础建立综合求解的解析式
- 近似综合
 - 以机构所能实现的运动与要求机构所实现的运动的偏差表达式建立机构综合的数学解析式
 - 近似综合一般能综合兼顾更多的运动要求，有利于机构运动特性的充分利用
- 连杆机构的解析综合根据其所用的数学工具不同而有不同的数学表达方法与运算形式

刚体位移矩阵

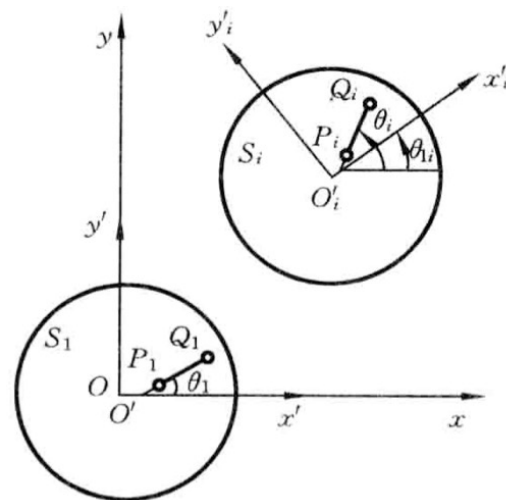
- 已知动坐标系 $x'Oy'$ 的运动描述，可以求得刚体上任意指定点 Q 在固定坐标系 xOy 中，运动前坐标 (x_{Q_1}, y_{Q_1}) 与运动后坐标 (x_{Q_i}, y_{Q_i}) 之间的关系

$$\begin{bmatrix} x_{Q_i} \\ y_{Q_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{1i} \begin{bmatrix} x_{Q_1} \\ y_{Q_1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\theta_{1i} = \theta_i - \theta_1$$

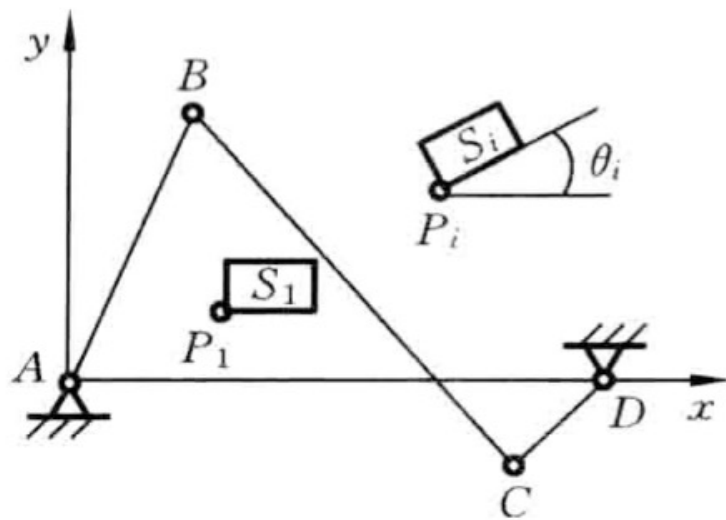
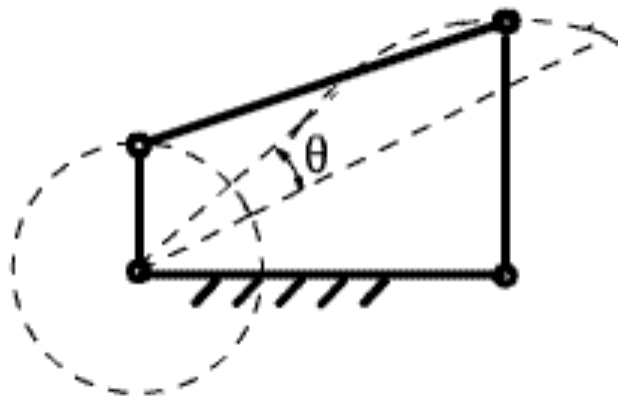
$$\mathbf{D}_{1i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{1i} & -\sin \theta_{1i} & x_{P_i} - x_{P_1} \cos \theta_{1i} + y_{P_1} \sin \theta_{1i} \\ \sin \theta_{1i} & \cos \theta_{1i} & y_{P_i} - x_{P_1} \sin \theta_{1i} - y_{P_1} \cos \theta_{1i} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{1i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{1i} & -\sin \theta_{1i} & 0 \\ \sin \theta_{1i} & \cos \theta_{1i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1i} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



刚体导引机构设计

- 给定连杆若干位置参数 x_{P_i} 、 y_{P_i} 、 θ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 要求设计此平面四杆机构
 - 设计此类机构的关键在于设计相应的连架杆

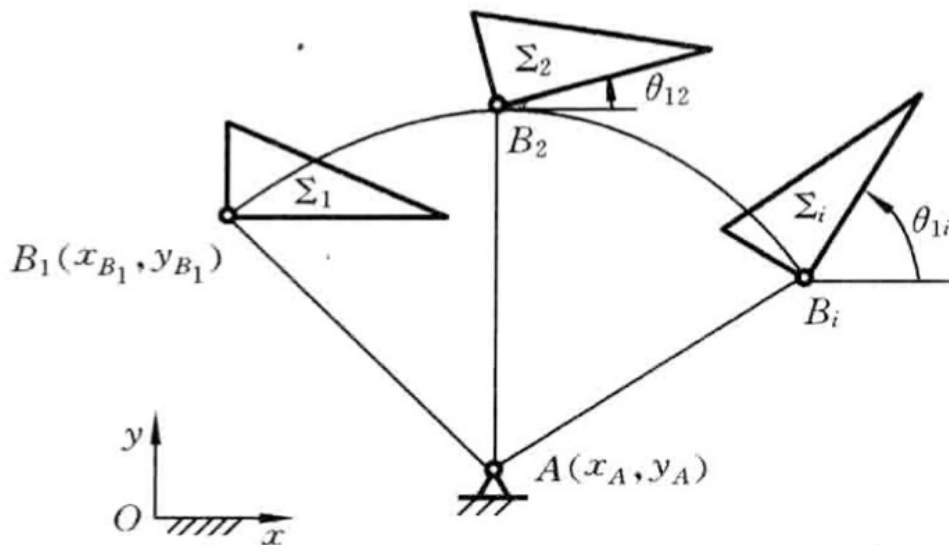


- 由于平面连杆机构的运动副只有转动副和移动副
 - 作为导引杆的连架杆也只有 $R-R$ 杆和 $P-R$ 杆两种形式
 - R 为转动副, P 为移动副

R-R连架杆（导引杆）的位移约束方程

- 在由两转动副分别与机架和连杆连接的R-R连架杆AB上，点A的坐标为 x_A 、 y_A
 - 因AB是绕点A转动的，故连架杆AB导引连杆BC运动的过程中，连杆上的点B应始终保持与点A的距离等于定长AB，据此可写出点B的位移约束方程——**定长方程**

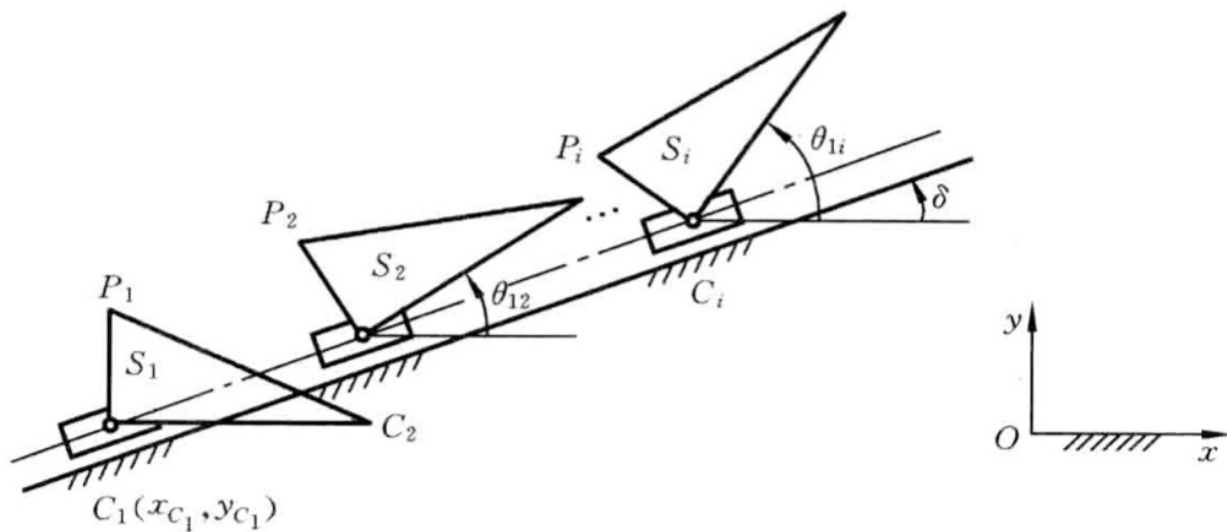
$$(x_{B_i} - x_A)^2 + (y_{B_i} - y_A)^2 = (x_{B_1} - x_A)^2 + (y_{B_1} - y_A)^2$$



P-R连架杆（导引杆）的位移约束方程

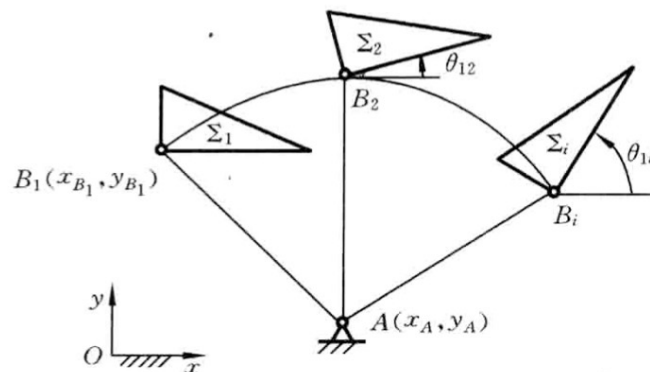
- 在由一转动副和一移动副分别与连杆和机架连接的 P-R 连架杆-滑块上，点 C 的坐标为 x_C 、 y_C
 - 因滑块是沿某一直线运动的，故滑块导引连杆 BC 运动的过程中，滑块与连杆的连接点 C 的若干位置 C_1, C_2, \dots, C_i 中每两点连线的斜率应相等，据此可写出点 C 的位移约束方程——定斜率方程

$$\frac{y_{C_i} - y_{C_1}}{x_{C_i} - x_{C_1}} = \frac{y_{C_2} - y_{C_1}}{x_{C_2} - x_{C_1}} = \tan \delta$$



刚体导引机构的设计步骤：R-R导引杆

- 若给定连杆的几个位置，即已知连杆上某点 P 的 n 个位置的坐标为 x_{P_i} 、 y_{P_i} ($i = 1, 2, \dots, n$) 及连杆上某条直线的位置角 θ_i ($i = 1, 2, \dots, n$)，则可按下述步骤求解



(1) 由式(2-18)得到导引杆的 $n-1$ 个约束方程为

$$(x_{B_i} - x_A)^2 + (y_{B_i} - y_A)^2 = (x_{B_1} - x_A)^2 + (y_{B_1} - y_A)^2 \quad (i=2, 3, \dots, n) \quad (2-20)$$

(2) 根据式(2-15)和 x_{P_i} 及 y_{P_i} ($i=1, 2, \dots, n$) 及 $\theta_{li} = \theta_i - \theta_1$ ($i=1, 2, \dots, n$)，求得刚体位移矩阵 \mathbf{D}_{li} ($i=2, 3, \dots, n$)。

(3) 根据式(2-14)，求得 x_{B_i} 、 y_{B_i} ($i=1, 2, \dots, n$) 与 x_{B_1} 、 y_{B_1} ($i=1, 2, \dots, n$) 之间的关系式为

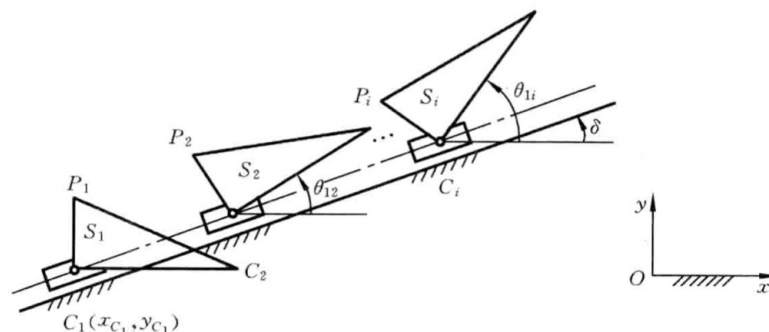
$$\begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{li} \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ y_{B_1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

(4) 将由上式求得的 x_{B_i} 、 y_{B_i} ($i=1, 2, \dots, n$) 代入式(2-20)，得到 $n-1$ 个设计方程。

(5) 求解上述 $n-1$ 个设计方程，即可求得未知量。

刚体导引机构的设计步骤：P-R导引杆

- 若给定连杆的几个位置，即已知连杆上某点 P 的 n 个位置的坐标为 x_{P_i} 、 y_{P_i} ($i = 1, 2, \dots, n$) 及连杆上某条直线的位置角 θ_i ($i = 1, 2, \dots, n$)，**但其中有一个P-R导引杆**，则可按下述步骤求解



(1) 由式(2-19)得到导引杆的 $n-2$ 个约束方程为

$$\frac{y_{C_i} - y_{C_1}}{x_{C_i} - x_{C_1}} = \frac{y_{C_2} - y_{C_1}}{x_{C_2} - x_{C_1}} \quad (i = 3, 4, \dots, n)$$

或写成

$$x_{C_1}(x_{C_2} - x_{C_i}) - y_{C_1}(y_{C_2} - y_{C_i}) + (x_{C_2}y_{C_i} - x_{C_i}y_{C_2}) = 0 \quad (i = 3, 4, \dots, n) \quad (2-21)$$

(2) 求得位移矩阵 D_{1i} ($i = 2, 3, \dots, n$)。

(3) 根据式(2-14)求得

$$\begin{bmatrix} x_{C_i} \\ y_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix} = D_{1i} \begin{bmatrix} x_{C_1} \\ y_{C_1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

若滑块的导路方向线与 x 轴的正向夹角为 δ ，则有

$$\tan \delta = \frac{y_{C_2} - y_{C_1}}{x_{C_2} - x_{C_1}}$$

应当指出，根据该方法求得的连杆机构，应检验其是否满足机构可动条件、曲柄条件和运动连续性条件等

(4) 将步骤(3)求得的 x_{C_i} 、 y_{C_i} 代入式(2-21)，得到 $n-2$ 个设计方程。

(5) 求解上述 $n-2$ 个方程。

轨迹生成机构的设计

- 机构连杆上的某点可通过某一预先给定的轨迹而实现一定的功能运动
 - 一般来说，由于连杆的待求参数有限，连杆上的某点不可能精确地通过预先给定的连续轨迹
- 而只能通过该轨迹上的几个点，从而近似地再现轨迹

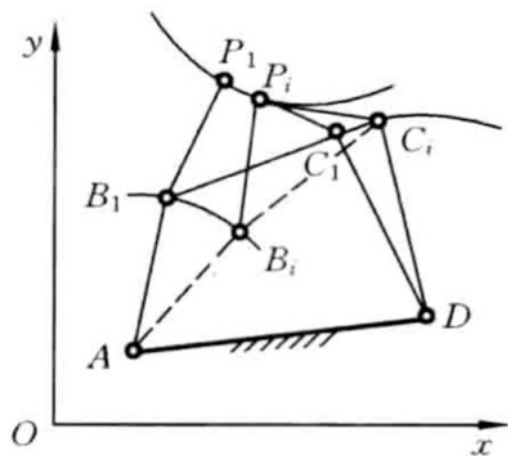


图 2-51 平面铰链四杆机构

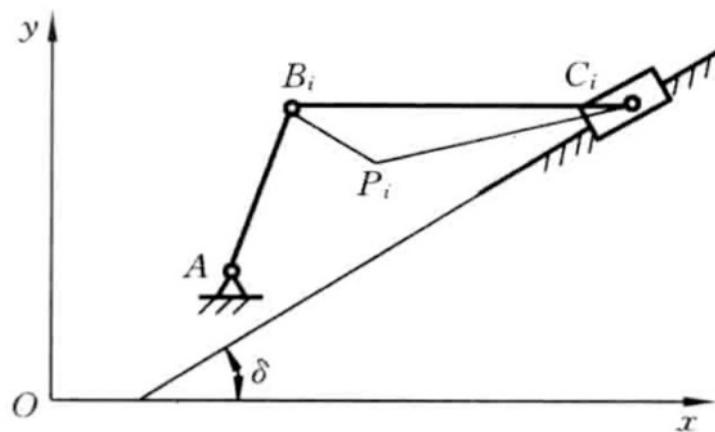
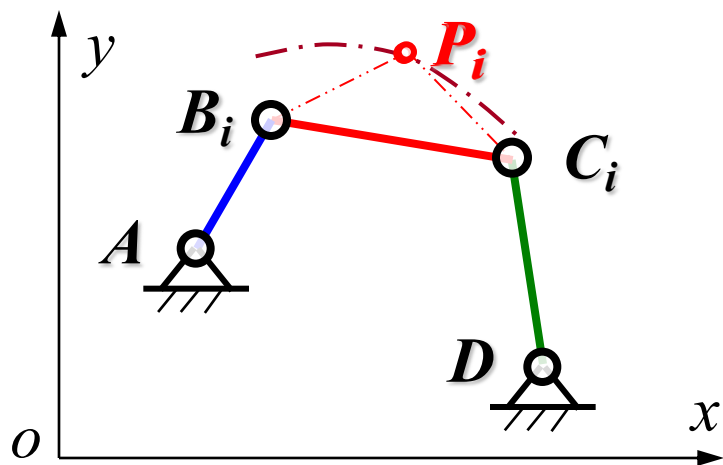


图 2-52 曲柄滑块机构

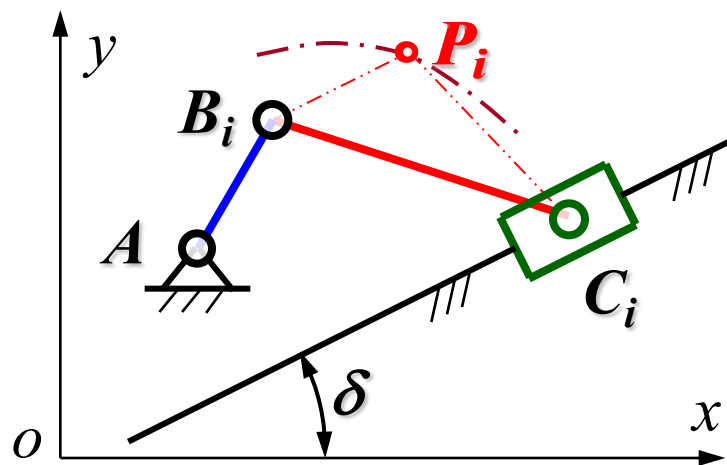
轨迹生成机构的设计

给定刚体上一个固定点 P 的平面运动轨迹，或若干个点 $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 坐标，设计：

- 铰链四杆机构
- 曲柄滑块机构



思考1: 用解析法，确定铰链四杆机构的结构需要多少个独立参数？



思考2: 用解析法，确定曲柄滑块机构的结构需要多少个独立参数？

平面铰链四杆的轨迹生成机构

讨论：未知数为 $8+(n-1)$ ，方程数为 $2(n-1)$ ，即 $n=9$ 时有确定解。
显然，平面铰链四杆机构最多可实现轨迹上**9个**给定点。

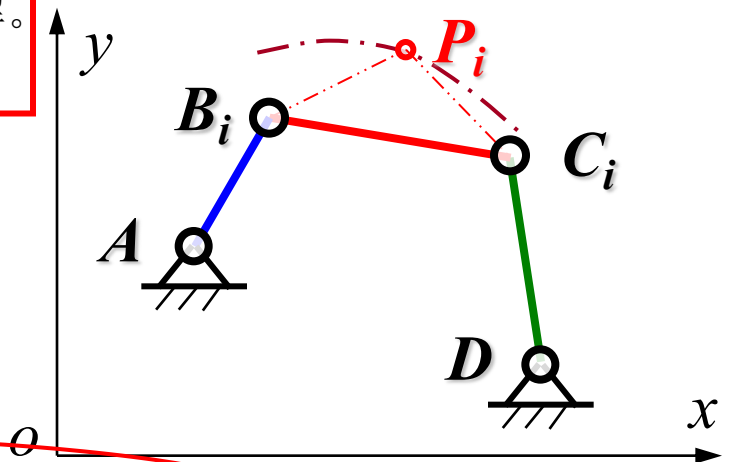
已知：铰链四杆机构的**连杆刚体**上点 P 的若干位置 $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$

未知：点 A 、 B 、 C 、 D 的初始坐标

首先，建立**刚体约束方程**：

$$\left. \begin{aligned} [x_{B_i} \quad y_{B_i} \quad 1]^T &= D_{1i} [x_{B_1} \quad y_{B_1} \quad 1]^T \\ [x_{C_i} \quad y_{C_i} \quad 1]^T &= D_{1i} [x_{C_1} \quad y_{C_1} \quad 1]^T \end{aligned} \right\}, \quad (i = 2, \dots, n)$$

转移矩阵



然后，依次建立**定长约束方程** (A 与 B 、 C 与 D)：

$$\left. \begin{aligned} (x_{B_i} - x_A)^2 + (y_{B_i} - y_A)^2 &= (x_{B_1} - x_A)^2 + (y_{B_1} - y_A)^2 \\ (x_{C_i} - x_D)^2 + (y_{C_i} - y_D)^2 &= (x_{C_1} - x_D)^2 + (y_{C_1} - y_D)^2 \end{aligned} \right\}, \quad (i = 2, \dots, n)$$

最后，刚体约束方程代入**定长约束方程**，消去中间变量 x_{B_i} 、 y_{B_i} 、 x_{C_i} 、 y_{C_i}

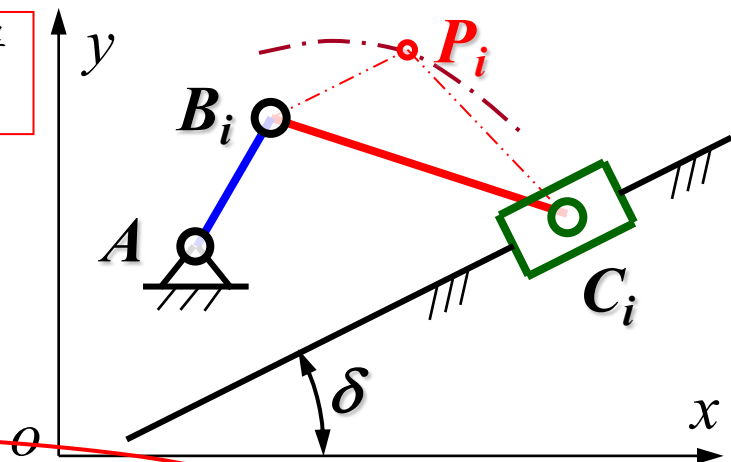
曲柄滑块的轨迹生成机构

讨论：未知数为 $7+(n-1)$ ，方程数为 $2(n-1)$ ，即 $n=8$ 有确定解
显然，曲柄滑块机构最多可实现轨迹上 8 个给定点。

已知：曲柄滑块机构的**连杆刚体**上点 P 的若干位置 $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$

未知：点 A 、 B 、 C 的初始坐标及 δ

首先，建立**刚体约束方程**：



$$\left. \begin{aligned} [x_{B_i} \quad y_{B_i} \quad 1]^T &= D_{1i} [x_{B_1} \quad y_{B_1} \quad 1]^T \\ [x_{C_i} \quad y_{C_i} \quad 1]^T &= D_{1i} [x_{C_1} \quad y_{C_1} \quad 1]^T \end{aligned} \right\}, \quad (i = 2, \dots, n)$$

转移矩阵

然后，依次建立**定长约束方程**(A 、 B)、**定斜率约束方程**(C):

$$\left. \begin{aligned} (x_{B_i} - x_A)^2 + (y_{B_i} - y_A)^2 &= (x_{B_1} - x_A)^2 + (y_{B_1} - y_A)^2 \\ \text{tg} \delta &= \frac{y_{C_i} - y_{C_1}}{x_{C_i} - x_{C_1}} \end{aligned} \right\}, \quad i = (2, \dots, n)$$

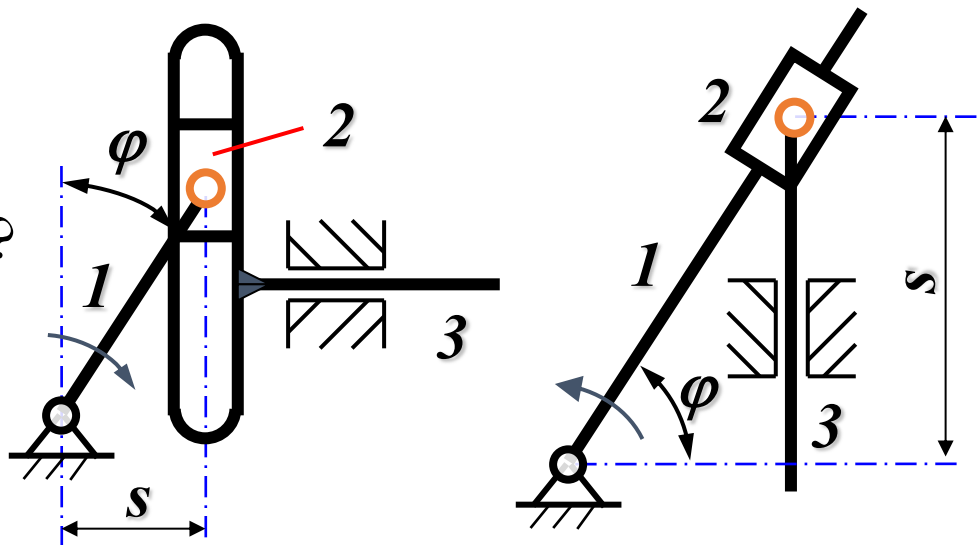
最后，刚体约束方程代入**定长约束方程**，消去中间变量 x_{B_i} 、 y_{B_i} 、 x_{C_i} 、 y_{C_i}

函数生成机构的运动设计

- 函数生成机构是指这样一类机构，即通过输入构件和输出构件的运动再现某种函数关系

• 想象一下：

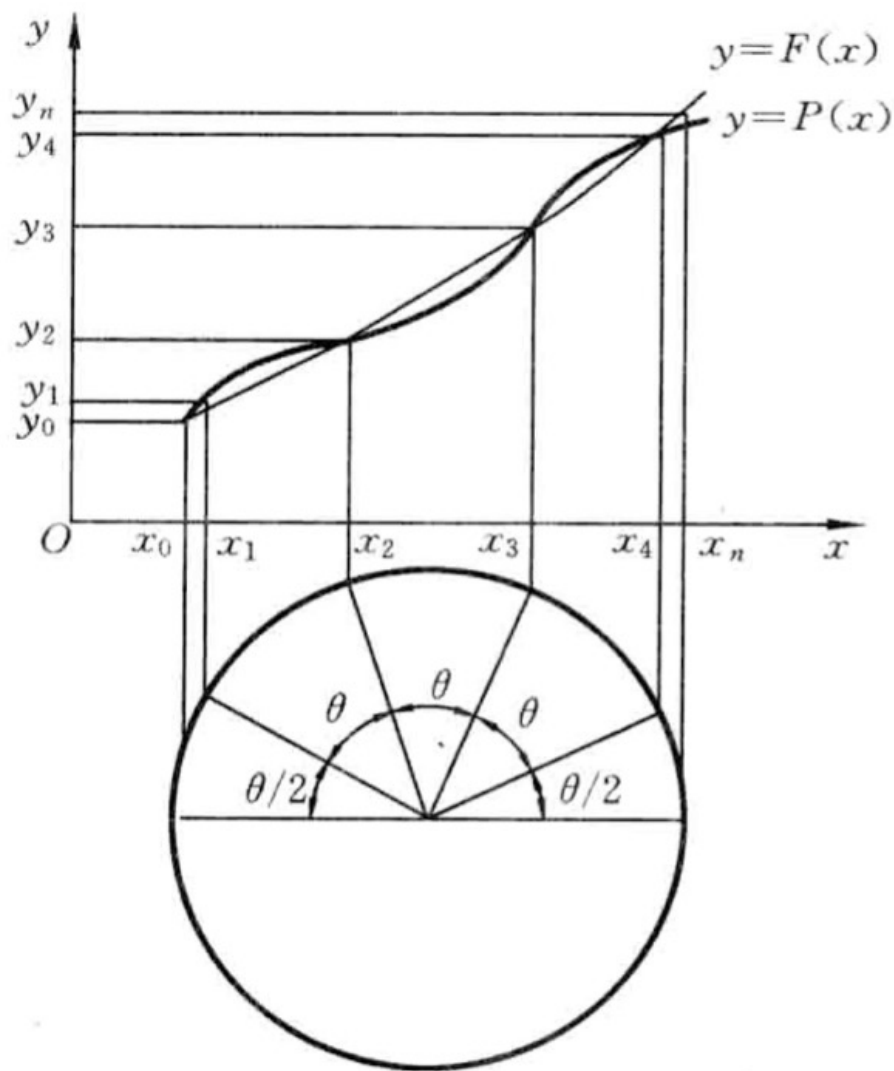
- 正弦函数机构是什么样的？
- 正切机构呢？



- 对于平面连杆函数机构，其输入和输出构件是两连架杆，它们可以是曲柄、摇杆或滑块

再现函数精确点的确定

- 设给定函数为 $y = F(x)$ ，而机构所能实现的函数为 $y = P(x)$
- 精确点或插值点
 - 一般平面四杆机构所能进行设计的参数有限，是不能精确实现给定函数的，只能在自变量 x 的整个区间 $[x_0, x_n]$ 上的若干个有限点上获得相同的函数值。
- 精确点以外，两函数间则存在偏差 Δy
 - Δy 的大小取决于插值节点的数目和分布情况，精确点越多，偏差 Δy 就越小，但精确点数不能超过待定机构参数的数目
 - 精确点的数目和位置一般可根据工艺要求来选取，即选择工艺上必须保证的几个位置作为精确点
 - 如工艺上无特殊要求，则可根据函数逼近理论确定



再现函数精确点的确定

- 设自变量自变量 x 的指定区间为 $[x_0, x_n]$ ，对应的输入构件和输出构件转角区间分别为 $[\varphi_0, \varphi_n]$ ， $[\psi_0, \psi_n]$ ，则精确点 x_i 为

$$x_i = x_0 + 0.5\Delta x[1 - \cos(i\theta - 0.5\theta)] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$n \text{ 为插值节点数目} \mid \Delta x = x_n - x_0 \mid \theta = 180^\circ/n$$

用此法得到的精确点，称为切贝雪夫 (Chebyshev) 精确点

- 比例因子：使输入和输出构件的转角 φ 与 ψ 与给定函数的 x 和 y 对应起来

$$k_\varphi = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{\varphi_n - \varphi_0}{x_n - x_0}, \quad k_\psi = \frac{\Delta\psi}{\Delta y} = \frac{\psi_n - \psi_0}{F(x_n) - F(x_0)}$$

- 于是，与给定精确点对应的连架杆转角为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_j &= \varphi_0 + k_\varphi(x_i - x_0) \\ \psi_j &= \psi_0 + k_\psi[F(x_i) - F(x_0)] \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, n)$$

铰链四连 杆机构的 函数机构 设计

1) 铰链四杆机构

图 2-54 所示的铰链四杆机构中, 因为各构件按比例缩放时并不影响机构的输入、输出关系, 即可取 $\overline{AD} = 1$, 而其余各杆的长度可表示为其相对长度。

(1) 由式 (2-34) 确定精确点 $\varphi_i - \psi_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。

(2) 根据连杆 BC 杆长不变建立一组约束方程

$$(x_{C_i} - x_{B_i})^2 + (y_{C_i} - y_{B_i})^2 = (x_{C_1} - x_{B_1})^2 + (y_{C_1} - y_{B_1})^2$$

且有

$$\begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{1i}^{AB} \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ y_{B_1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_{C_i} \\ y_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{1i}^{DC} \begin{bmatrix} x_{C_1} \\ y_{C_1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (2-29)$$

其中

$$\mathbf{D}_{1i}^{AB} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{1i} & -\sin\varphi_{1i} & 0 \\ \sin\varphi_{1i} & \cos\varphi_{1i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{1i}^{DC} = \begin{bmatrix} \cos\psi_{1i} & -\sin\psi_{1i} & 1 - \cos\psi_{1i} \\ \sin\psi_{1i} & \cos\psi_{1i} & -\sin\psi_{1i} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

\mathbf{D}_{1i}^{AB} 、 \mathbf{D}_{1i}^{DC} 可参照式 (2-16) 和式 (2-15) 得到。故由式 (2-29) 可得到含有以 x_{B_1} 、 y_{B_1} 和 x_{C_1} 、 y_{C_1} 为未知数的 $n-1$ 个方程的方程组。

(3) 求解方程组, 并进而计算出机构各构件的尺寸。

由以上求解过程可知, 当 $n=5$ 时机构有唯一的确定解 (当然若已知条件不合适, 也可能无解); 而当 $n < 5$ 时, 有无穷多解; 当 $n \geq 5$ 时, 无精确解。

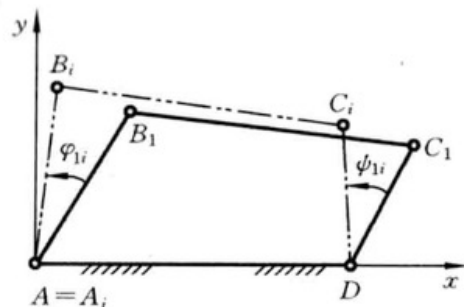


图 2-54 铰链四杆机构

滑块机构的函数机构设计

2) 滑块机构

图 2-55 所示的滑块机构中,若确定 n 个精确点后,即可得到曲柄和滑块间的 $\varphi_1 - S_1, \varphi_2 - S_2, \dots, \varphi_n - S_n$ 的 n 组对应关系。为简便计,可取 AB 杆的转动中心 A 为直角坐标系的原点 O , x 轴与滑块 3 的导路线平行。

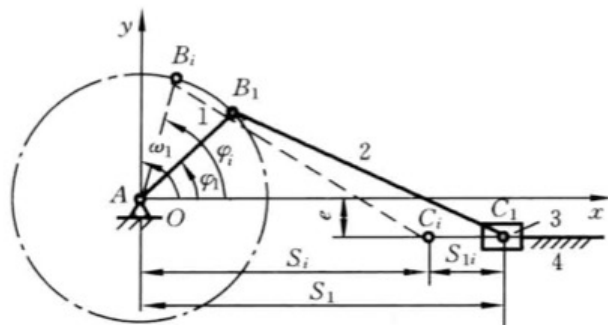


图 2-55 滑块机构

根据式(2-16)可写出曲柄 AB 的旋转矩阵为

$$D_{1i}^{AB} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{1i} & -\sin\varphi_{1i} & 0 \\ \sin\varphi_{1i} & \cos\varphi_{1i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中, $\varphi_{1i} = \varphi_i - \varphi_1$ ($i=2, 3, \dots, n$)。而点 B 的位置方程为

$$[x_{B_i} \quad y_{B_i} \quad 1] = D_{1i}^{AB} [x_{B_1} \quad y_{B_1} \quad 1]^T$$

铰链中心 C 随滑块 3 平移,所以点 C 的位置方程为

$$x_{C_i} = x_{C_1} + S_{1i}, \quad y_{C_i} = y_{C_1}$$

其中, $S_{1i} = S_i - S_1$ 。根据连杆 BC 长度不变,可得约束方程为

$$(x_{B_i} - x_{C_i})^2 + (y_{B_i} - y_{C_i})^2 = (x_{B_1} - x_{C_1})^2 + (y_{B_1} - y_{C_1})^2 \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

由以上诸式不难求得包含 4 个待求参数 x_{B_1} 、 y_{B_1} 和 x_{C_1} 、 y_{C_1} 的 $n-1$ 个方程,故一般可给定曲柄位置角与从动件位置的对应个数为 $n \leq 5$ 。



ME303: 机械设计

2022年秋季

谢谢~

宋超阳
南方科技大学